**Επιστημονικός Υπολογισμός**

**Quiz 3**

**Άσκηση 1**

**A)**

F(x,y) = (2x -4y)4 + ex^2 -2y

Fx(x,y) = 8(2x-4y)3 + 2xex^2-2y

Fy(x,y) = -16(2x-4y)3 -2ex^2-2y

Fxx(x,y) = 48(2x-4y)2 + 2ex^2-2y + 4x2ex^2-2y

Fyy(x,y) = 192(2x-4y)2 + 4ex^2-2y

Fxy(x,y) = -96(2x-4y)2 -4xex^2-2y

Η gradient της f είναι:

Gradf =

Hessianf =

**B)**

Σύμφωνα με το πολυώνυμο του Taylor έχουμε:

F(x,y) = f(1,1) + (x-1)fx(1,1) + (y-1)fy(1,1) + [(x-1)2fxx(1,1) + 2(x-1)(y-1)fxy(1,1) +

(y- 1)2fyy(1,1)]/2! = 16 + 1/e + (x-1)(-64+2/e) + (y-1)(128-2/e) + [(x-1)2(192+6/e) + 2(x-1)(y-1)(-384-4/e) + (y-1)2(768+4/e)]

**Άσκηση 2**

**Α)**

F(x,y) = (x-2y)2 + ex

Fx(x,y) = 2(x-2y) + ex

Fy(x,y) = -4(x-2y)

F(1,-1) = 9 + e

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Newton έχουμε:

Xn+1 = xn – J(xn)-1 f(xn)

J(xn)Sn = -f(xn)

Xn+1 = xn + Sn

J(xn) = \* = - (9 + e) ⬄ (6 + e)S1 + -12S2 = -9 –e ⬄

(6S1 -12S2) + S1e = -9 –e ⬄ ⬄

Xn+1 = + =

**B)**

F(x,y) = (x-2y)2 + ex

Σύμφωνα με τη μέθοδο της απότομης κατάβασης έχουμε:

X1 = x0 –a \* gradf(x0)

Gradf(x,y) =

Gradf(1,-1) =

X1 = - =

**Άσκηση 3**

**Α)**

F(x) = xT x + x + 13

Έστω x = , τότε αντικαθιστώντας το x στην F έχουμε:

F(x) = 9x12 + 9x22 + 9x32 + 4x1x2 + 2x1x3 + 6x2x3 + 4x1 + 5x2 + 6x3 +13

Fx1 = 18x1 + 4x2 + 2x3 + 4

Fx2 = 18x2 + 4x1 + 6x3 + 5

Fx3 = 18x3 + 2x1 + 6x2 + 6

Fx1x1 = 18

Fx2x2 = 18

Fx3x3 = 18

Fx1x2 = 4

Fx1x3 = 2

Fx2x3 = 6

Οπότε:

Hf =

Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα z = , τότε:

zT Hf z = = 18z12 + 18z22 + 18z32 + 8z1z2 + 4z1z3

+ 12z2z3 = (2z1 + 2z2)2 + (2z1 + z3)2 + (2z2 + 3z3)2 + 10z12 + 10z22 + 8z32 > 0 για z 0

Άρα ο πίνακας Hf είναι θετικά ορισμένος και ι συνάρτηση F κυρτή.

**Β)**

Σύμφωνα με τη μέθοδο της απότομης κατάβασης έχουμε:

Gradf =

Για xi = έχουμε:

Gradf =

Xi+1 = -1\* =

Για xi+1 = έχουμε:

Gradf =

Xi+2 = - 1\* =

**Άσκηση 5**

**Α)**

F(x,y) = 3x2 – 12xy + 19y2 - 2x - 4y + 5

Fx(x,y) = 6x - 12y – 2

Fy(x,y) = 38y - 12x – 4

Fxx(x,y) = 6

Fyy(x,y) = 38

Fxy(x,y) = -12

Πρώτα υπολογίζουμε τα ακρότατα, αν υπάρχουν:

Gradf = 0 ⬄ = ⬄

⬄ (+)

Οπότε: 38y -24y = 8 ⬄ y = 4/7

και 6x -12\*4/7 -2 = 0 ⬄ x = 31/21

Σύμφωνα με το τεστ της δεύτερης παραγώγου έχουμε:

D = fxx(x0,y0)\*fyy(x0,y0) - fxy2(x0,y0) = 6\*38 – 122 = 84 >0

Και επίσης fxx(x0,y0) = 6 > 0

Άρα στο σημείο A(31/21, 4/7) η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

**Β)**

G(s,t) = s3 + 3t2 +12st + 2

Gs(s,t) = 3s2 + 12t

Gt(s,t) = 6t + 12s

Gss(s,t) = 6s

Gtt(s,t) = 6

Gst(s,t) = 12

Βρίσκουμε ακρότατα:

Gradf = 0 ⬄ = ⬄ ⬄

⬄

Εφαρμόζουμε το τεστ της δεύτερης παραγώγου για τις τιμές που βρήκαμε:

Για το (0,0) έχουμε:

D = gss(0,0)\*gtt(0,0) – gst2(0,0) = 0\*6 – 122 = -144 < 0 σαγματικό σημείο

Για το (8,-16) έχουμε:

D = gss(8,-16)\*gtt(8,-16) – gst2(8,-16) = 48\*6 -122 = 144 > 0

Και επίσης gss(8,-16) = 48 > 0

Άρα στο σημείο (8,-16) η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.